DURÉE : 3 heures

Les deux parties sont indépendantes et seront traitées sur des feuilles séparées.

I

1° Soit X une variable aléatoire, à valeurs entières positives ou nulle. On désigne par a_k la probabilité de l'événement $(X = k)$.

a. On considère la série entière de terme général réel $a_k z^k$. Que peut-on dire, en général, de son domaine de convergence D_X ?

b. On pose $G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. La fonction G_X, définie sur D_X, s'appelle la fonction génératrice de la variable aléatoire X. Montrer que la loi de probabilité de X est entièrement déterminée par sa fonction génératrice.

c. Lorsque le rayon de convergence de la série entière $(a_k z^k)$ est strictement supérieur à 1, déterminer l'espérance et la variance de X à partir des dérivées première et seconde de la fonction G_X.

d. Montrer que si deux variables aléatoires X et Y, à valeurs entières positives ou nulle, sont indépendantes, la fonction génératrice de la variable X + Y est telle que :

$$(1) \qquad G_{X+Y}(z) = G_X(z) \cdot G_Y(z)$$

2° On suppose que X est une variable aléatoire de Poisson, de paramètre λ.

a. Déterminer D_X, puis la fonction génératrice G_X.
En déduire l'espérance et la variance de X.

b. Si X et Y sont deux variables aléatoires de Poisson, indépendantes, de paramètres respectifs λ et μ, déterminer la loi de probabilité de leur somme. En déduire la loi conditionnelle de X sachant $X + Y = n$, où n est un entier donné.

3° Soit une suite chronologique d'expériences aléatoires identiques et indépendantes : $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_i, \ldots$ Chaque expérience $\mathcal{E}_i$ permet l'observation d'un événement E avec la probabilité p, strictement comprise entre 0 et 1, ou de l'événement $\overline{E}$, complémentaire de E, avec la probabilité q.

Tournez la page S. V. P.

a. Soit R la variable aléatoire associant à la suite d'expériences le rang du premier événement E.

Déterminer la fonction génératrice de R en précisant son domaine de définition; en déduire l'espérance et la variance de R.

b. A chaque expérience $\mathcal{E}_i$ on associe une variable aléatoire X_i, indicatrice de l'événement E, qui prend la valeur 1 si E est réalisé, ou 0 si $\overline{E}$ est réalisé.

Aux n premières expériences, on associe la variable $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

En généralisant la relation (1), déterminer la fonction génératrice de S_n ; en déduire la loi de probabilité de S_n.

c. Soit une variable aléatoire T, de même loi que S_n mais pour laquelle, si n tend vers l'infini, le produit np conserve une valeur constante λ. Déterminer, dans ces conditions, la limite de $G_T(z)$ lorsque n tend vers l'infini; interpréter ce résultat.

II

Pour tout entier naturel n, soit r_n l'application de l'intervalle [0 , 1] de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$r_n(t) = \begin{cases} (-1)^k & \text{si } \dfrac{k}{2^n} < t < \dfrac{k+1}{2^n} \quad \text{où } k \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1 \\ 0 & \text{si } t = \dfrac{k}{2^n} \quad \text{où } k \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leqslant k \leqslant 2^n \end{cases}$$

1° Tracer les graphes de r_0, r_1, r_2, r_3.

2° On se propose de démontrer que :

$$(1) \qquad \int_0^1 r_n(t)\, r_p(t)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq p \\ 1 & \text{si } n = p \end{cases}$$

a. Pour tout entier n, on note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des entiers k tels que $0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1$, et, si k est un élément de $\mathcal{E}_n$, on pose :

$$\Delta_n^k = \left] \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right[.$$

Montrer que si deux entiers n et n' sont tels que $n' \leqslant n$, pour tout k appartenant à $\mathcal{E}_n$, il existe k' appartenant à $\mathcal{E}_{n'}$ tel que :

$$\Delta_n^k \subset \Delta_{n'}^{k'}$$

b. Pour tout entier n, on note $\mathcal{H}_n$ l'ensemble des entiers *pairs* h tels que $0 \leqslant h \leqslant 2^n - 2$, et, pour tout élément h de $\mathcal{H}_n$, on pose :

$$I_n^h = \left] \frac{h}{2^n}, \frac{h+2}{2^n} \right[.$$

Montrer que si p et n sont deux entiers tels que $p < n$, pour tout h appartenant à $\mathcal{H}_n$, il existe k appartenant à $\mathcal{E}_p$ tel que :

$$I_n^h \subset \Delta_p^k$$

c. En déduire (1).

3° Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de nombres réels. Montrer que :

$$(2) \qquad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{n=N} a_n r_n(t) \right)^2 dt = \sum_{n=0}^{n=N} a_n^2 .$$

4° Soient n, p, q, s quatre entiers.

Montrer que l'intégrale

$$\int_0^1 r_n(t)\, r_p(t)\, r_q(t)\, r_s(t)\, dt$$

vaut 1 si et seulement si les quatre entiers n, p, q, s sont deux à deux égaux, 0 sinon.

Expliciter le sous-ensemble de $\mathbb{N}^4$ des entiers (n, p, q, s) tels que :

$$\int_0^1 r_n(t)\, r_p(t)\, r_q(t)\, r_s(t)\, dt = 1$$

5° Montrer que, pour toute suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$ de nombres réels, on a l'inégalité :

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{n=N} a_n r_n(t) \right)^4 dt \leqslant 3 \left(\sum_{n=0}^{n=N} a_n^2 \right)^2$$

Tournez la page S. V. P.

6° N étant un entier naturel, on note $\mathcal{P}_N$ l'ensemble des applications de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ de la forme :

$$t \longmapsto \sum_{n=0}^{n=N} c_n r_n(t)$$

où les c_n sont $(N + 1)$ nombres réels quelconques.

Si f est une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, pour chaque entier n, on pose :

$$a_n(f) = \int_0^1 f(t)\, r_n(t)\, dt$$

et on note S_N^f l'application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$S_N^f(t) = \sum_{n=0}^{n=N} a_n(f)\, r_n(t)$$

a. Montrer que :

$$(3) \qquad \forall L \in \mathcal{P}_N, \quad \int_0^1 f(t) L(t)\, dt = \int_0^1 S_N^f(t) L(t)\, dt$$

b. En déduire que :

$$(4) \qquad \forall L \in \mathcal{P}_N, \quad \int_0^1 [f(t) - L(t)]^2\, dt = \int_0^1 f^2(t)\, dt + \int_0^1 [S_N^f(t) - L(t)]^2\, dt - \int_0^1 [S_N^f(t)]^2\, dt$$

puis que :

$$(5) \qquad \forall L \in \mathcal{P}_N, \quad \int_0^1 [f(t) - L(t)]^2\, dt \geqslant \int_0^1 [f(t) - S_N^f(t)]^2\, dt$$

et que :

$$(6) \qquad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{n=N} a_n^2(f) \leqslant \int_0^1 f^2(t)\, dt$$

c. Montrer que la série de terme général $a_n^2(f)$ converge.

Que peut-on dire de $a_n(f)$ quand n tend vers l'infini?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail